Kapitel X
Über die Konstruktion von Differenzen-Differentialgleichungen mit Quadraturen von Kurven *

Leonhard Euler

Problem 129

§1017 Wenn $y = \int V\partial x$ galt, während V irgendeine Funktion der zwei Größen x und u bezeichnen, von welchen aber diese, u, bei der Integration als Konstante angesehen wird, nach der Integration aber $x = a$ gesetzt wird, dass y einer gewissen Funktion von u gleich wird, wenn daher der Wert nun nur von der Variable u abhängt, der Wert $\frac{\partial y}{\partial x}$ ausfindig zumachen.

Lösung

Weil $\int V\partial x$ eine gewisse Funktion der zwei Größen x und u darbietet, deren Differential für konstantes $u = V\partial x$ ist, wird, wenn so u wie x variabel angesehen werden, das Differential die Form $\partial y = V\partial x + U\partial u$ haben, weil dieses Differentail ein vollständiges ist, ist es notwendig [§433], dass $\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ gilt. Aber weil V eine gegebene Funktion von x und u ist, setze

*Originaltitel: "De constructione aequationum differentio-differentialium per quadraturas curvarum", erstmals publiziert im Jahre 1769, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 12 pp 230-255“, Eneström-Nummer E366, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Florian Brähler, im Rahmen des Euler Seminars im Sommersemester 2015 man $\partial V = P\partial x + Q\partial u$ und es wird $(\frac{\partial V}{\partial u}) = Q$ und daher $(\frac{\partial U}{\partial x}) = Q$ gelten. Daher wird für wiederum konstant angesehenes u $\partial U = Q\partial dx$ und $U = \int Q\partial dx$ sein, in welcher Integration allein x für variabel gehalten wird. Wenn wir deshalb diesen Wert $\int Q\partial x$ als bekannt ansehen, welcher sich natürlich durch Quadraturen angeben lässt, wird $\partial y = V\partial x + \partial u \int Q\partial x$ gelten. Wir suchen aber das Differential von y, was aus der Veränderlichkeit allein von u entspringt; weil dieses $\partial y = \partial u \int Q\partial x$, wird der gesuchte Wert $(\frac{\partial y}{\partial u}) = \int Qdx$ sein, wenn freilich nach der Integration ebenso $x = a$ gesetzt wird.

Korollar 1

§1018 Weil $y = \int V\partial x$ eine Funktion von x und y ist, durch Integration der Formel $V\partial x$, in welcher u konstant angesehen wird, irgendeine Funktion von u anstelle der Konstante hinzukommen kann, wird die Funktion y per se unbestimmt sein, wird aber bestmmt werden, sobald das Integral so angenommen wird, dass es für $x = 0$ verschwindet

Korollar 2

§1019 Unter Beachtung dieser Bedingung wird y für $x = 0$ verschwinden, welcher Wert auch immer der anderen Größe u zugeteilt wird; es wird also auch $y + \partial u(\frac{\partial y}{\partial u}) = 0$ für $x = 0$ sein, also auch $(\frac{\partial y}{\partial u}) = 0$. Daher tritt es klar zutage, dass $\int Q\partial x = (\frac{\partial y}{\partial u})$ auch so angenommen werden muss, dass es für $x = 0$ verschwindet.

Korollar 3

§1020 Weil $y = \int V\partial x$ gilt, wird $(\frac{\partial y}{\partial x}) = V$ gelten, daher $(\frac{\partial\partial y}{\partial u\partial x}) = (\frac{\partial V}{\partial u})$. Aber wenn $(\frac{\partial y}{\partial u}) = Z$ gesetzt wird, wird auch $(\frac{\partial\partial y}{\partial u\partial dx}) = (\frac{\partial Z}{\partial x})$ gelten, also $(\frac{\partial Z}{\partial x}) = (\frac{\partial V}{\partial u})$. Daher word für konstant betrachtetes u $\partial Z = \partial x(\frac{\partial V}{\partial x})$ und $Z = \int \partial x(\frac{\partial V}{\partial u})$ und daher $(\frac{\partial y}{\partial u}) = \int \partial x(\frac{\partial V}{\partial u})$

Korollar 4

§1021 Wenn daher also nach den so ausgeführten Integrationen, dass die Integrale für $x = 0$ verschwinden, $x = a$ gesettz wird, wird so der Wert $y = \int V\partial dx$ wie der $(\frac{\partial y}{\partial u}) = \int dx(\frac{\partial V}{\partial u})$ eine bestimmte Funktion von u sein.

Korollar 5

§1022 Indem auf gleiche Weise weiter fortgeschritten wird, wird $(\frac{\partial\partial y}{\partial u^2}) = \int \partial x(\frac{\partial V}{\partial u^2})$ sein. Wenn daher L, M und N irgendwelche Funktionen von u bezeichnen, wird gelten

$$L\left(\frac{\partial\partial y}{\partial u^2}\right) + M\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) + Ny = \int \partial x(L\left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2}\right) + M\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right) + NV)$$

und die ganze Formel geht daruaf zurück, dass diese Formel eine Integration zulässt.

Bemerkung

§1023 Nachdem also die Funktion L, M, N von u gegeben worden sind, muss eine Funtion der zwei Variablen x und u gesucht werden, sodass für konstant betrachtetes u die Formel

$$(L\left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2}\right) + M\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right) + NV)\partial x$$

uneingeschränkt integrierbar wird; damit deren Integral so bestimmt wird, werde es so genommen, dass es für $x = 0$ verschwindet. Dann setze man aber $x = a$, und wenn jenes Integral auch in diesem Fall verschwindet, wird gelten

$$\frac{L\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny = 0$$

und daher leistet der nach der vorgeschriebenen Weise genommenen Wert $y = \int V\partial x$ genüge. Aber das Problem nach Vergabe der Funktionen L, M und N die Funktion V zu definieren mit höchst unbestimmt und kann mit bis jetzt bekannten Methoden nicht im Allgemeinen gelöst werden; daher wird es zuträglich sein, es in umgekehrter Reihenfolge zu behandeln, dass nach

Annahme der Funktion V die anderen, L, M und N ausfindig gemacht werden. Daher werden wir Differenzen-Differentialgleichungen erlangen, deren Integrale wir auf diese Weise angeben können werden; wenn diese nicht mit anderen Methoden behandelt werden können, geben sie einen riesigen Vorteil an die Hand. Wenn also jenes Integral

$$\int (L\left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2}\right) + M\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right) + NV)\partial x$$

für $x = a$ gesetzt nicht verschwindet, sondern eine gegebene Funktion von u,U_j darbietet, wird der Wert $y = \int V\partial x$ dieser Gleichung zukommmen

$$\frac{L\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny = U_j$$

weil diese auf enendlich viele Arten in andere Formen gebracht werden kann, werden auch deren Integrale bekannt werden, wo es zugleich angenehmerweise geschieht, dass, abgleich man nur ein partikuläres Integral erhällt, daher dennoch meist das vollständige Integral ohne Schwierigkeit berechnet werden kann.

Problem 130

§1023 Differenzen-Differentialgleichungen der Form

$$\frac{L\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny = U$$

zu finden, dass L, M, N und U Funktionen von u sind, deren Element da hier konstant angenommen wird, sodass das Integral der Form mit Hilfe der Konstruktion durch Quadraturen dargebeten werden kann.

Lösung

Man nehme nun irgendeine Funktion der zwei Variablen u und x, die V sei, und man nehme das Integral $\int V\partial x$ für konstant betrachtete Größe u so, dass es für $x = 0$ verschwindet, dann aber $x = a$ wird, während a irgendeine konstante Größe bezeichnet, dass nun $\int Vdx$ eine gewissen Funktion nur von u ausdrückt, welcher die Größe y gleich wird, dass $y = \int V\partial x$ ist. Weil nun gilt

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \int \partial x\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right) und \frac{\partial\partial y}{\partial u^2} = \int \partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2}\right)$$

nachdem die Integrale in gleicher Weise so genommen worden sind, dass sie für $x = 0$ verschwinden, dann aber setze man $x = a$, suche die Funktionen L, M, N von u, dass diese Formel

$$\int \partial x \left(L \left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2} \right) + M \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right) + NV \right)$$

uneingeschränkt integrierbar wird, und man bestimme ihr Integral so, dass sie für $x = a \quad = U$ wird. Wenn das geleistet worden ist, ist es ersichtlich, dass die Differenzen-Differentialgleichung die angenommene Formel $y = \int V \partial x$ Genüge leistet.

Korollar

§1025 Die Annahme der Funktion V ist also nicht völlig unserem Belieben überlassen, sondern es ist besonders darauf zu achten, dass eine solche Form

$$\int \left(L \left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2} \right) + M \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right) + NV \right)$$

per se integrierbar wird.

Korollar

§1026 Daher werden also sofort unendlich viele für dieses Ziel ungeeignete Formen ausgeschlossen, von welcher Art $V = UP$ ist, während U eine Funktion von u und P eine nur von u ist, weil dann gelte

$$y = U \int P \partial x, \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial u} \int P \partial x \, und \, \frac{\partial\partial y}{\partial u^2} = \frac{\partial\partial U}{\partial u^2} \int P \partial x$$

, die freilich dasselbe Integral umfasst, es dass aus deren Verbindung keine uneingeschränkt integrierbare Formel dargestellt werden kann.

Beispiel 1

§1027 Es sei $V = x^n\sqrt{\frac{uu+xx}{cc-xx}}$ *und* $y = \int x^n\partial x\sqrt{\frac{uu+xx}{cc-xx}}$, während das Integral für $x = 0$ verschwindet, dann aber nach der Integration $x = a$ gesetzt wird. Es wird also gelten

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right) = x^n\frac{u}{\sqrt{(uu+xx)(cc-xx)}}\; und \;\left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2}\right) = x^n\frac{xx}{(uu+xx)^{3/2}\sqrt{cc-xx}}$$

und es muss dann diese Formel integrierbar gemacht werden

$$x^n\partial x\left(\frac{Lxx}{(uu+xx)^{3/2}\sqrt{cc-xx}} + \frac{Mu}{\sqrt{(uu+xx)(cc-xx)}} + N\sqrt{\frac{uu+xx}{cc-xx}}\right)$$

oder

$$\frac{x^n\partial x}{(uu+xx)^{3/2}\sqrt{cc-xx}}\left(Lxx + Mu(uu+xx) + N(uu+xx)^2\right)$$

Man setze das Integral

$$= \frac{x^{n+1}\sqrt{cc-xx}}{\sqrt{uu+xx}}$$

weil deren Differentail dieses ist

$$\frac{(n+1)x^n(cc-xx)(uu+xx) - x^{n+2}(uu+xx) - x^{n+2}(cc-xx)}{(uu+xx)^{3/2}\sqrt{cc-xx}}$$

oder

$$\frac{x^n\partial x}{(uu+xx)^{3/2}\sqrt{cc-xx}}\left\{\begin{matrix}(n+1)ccuu & +(n+1)ccxx & -(n+1)uuxx & -(n+1)x^4\\ & -ccxx & -uuxx & \end{matrix}\right\}$$

wenn diese mit der vorgelegten verglichen wird, wird werden

$$Mu^3 + Nu^4 = (n+1)ccuu\,,\; L + Mu + 2Nuu = ncc - (n+2)uu$$

und

$$N = -(n+1)$$

Daraus findet man

$$Mu = (n+1)(cc+uu)\; oder\; M = \frac{(n+1)(cc+uu)}{u}$$

und

$$L = -(n+1)(cc+uu) + 2(n+1)uu + ncc - (n+2)uu \, oder \, L = -cc - uu$$

Deswegen werden wir haben

$$-\frac{(cc+uu)\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{(n+1)(cc+uu)\partial y}{u\partial u} - (n+1)y = \frac{a^{n+1}\sqrt{cc-aa}}{\sqrt{aa+uu}}$$

welcher Gleichung dann genügt:

$$y = \int x^n \partial x \sqrt{\frac{uu+xx}{cc-xx}}$$

nach so ausgeführter Integration, wie es angegeben worden ist.

Korollar 1

§1028 Für $a = c$ wird also die Integralformel $y = \int x^n \partial x \sqrt{\frac{uu+xx}{cc-xx}}$, wenn nach der Integration $x = c$ gesetzt wird, das Integral dieser Gleichung darbieten

$$u(cc+uu)\partial\partial y - (n+1)(cc+uu)\partial u \partial y + (n+1)uy\partial u^2 = 0$$

oder

$$\partial\partial y - \frac{(n+1)\partial u \partial y}{u} + \frac{(n+1)y\partial u^2}{cc+uu} = 0$$

Korollar 2

§1029 Wenn $n = 1$ ist, findet man durch Integration

$$\begin{aligned} \int \partial x \sqrt{\tfrac{uu+xx}{cc-xx}} &= \tfrac{1}{4}(cc+uu) arcsin \tfrac{2xx-cc+uu}{cc+uu} \\ &- \tfrac{1}{2}\sqrt{ccuu + ccxx - uuxx - x^4} \\ &- \tfrac{1}{4}(cc+uu) arcsin \tfrac{-cc+uu}{cc+uu} + \tfrac{1}{2}cu \end{aligned}$$

und für $x = c$ wird

$$\begin{aligned} &y = \tfrac{1}{4}(cc+uu) arccos \tfrac{uu-cc}{cc+uu} + 1/2cu \, und \, daher \\ &\tfrac{\partial y}{\partial u} = \tfrac{1}{2} u arccos \tfrac{uu-cc}{cc+uu} \, und \\ &\tfrac{\partial\partial y}{\partial u^2} = \tfrac{1}{2} arccos \tfrac{uu-cc}{cc+uu} - \tfrac{cu}{cc+uu} \end{aligned}$$

welche Formeln offenbar diese Gleichung Genüge leisten:

$$\partial\partial y - \frac{2\partial u \partial y}{u} + \frac{2y\partial u^2}{cc+uu} = 0$$

Korollar 3

§1030 In diesem Fall kann das Integral auch auf diese Weise ausgedrückt werden

$$y = \frac{1}{4}(cc+uu) arcsin \frac{2cu}{cc+uu} + \frac{1}{2}cu\,,$$

oder weil ein gewisses Vielfaches ihrer gleichermaßen Genüge leistet

$$y = (cc+uu) arcsin \frac{2cu}{cc+uu} + 2cu\,,$$

Es genügt aber auch $y = cc+uu$, welcher das vollständige Integral dieses ist

$$y = \alpha(cc+uu) arcsin \frac{2cu}{cc+uu} + 2\alpha cu + \beta(cc+uu)$$

Bemerkung

§1031 Dass der Wert $y = cc+uu$ genügt, lässt sich aus dem gefundenen Integral schließen; denn weil $arcsin \frac{2cu}{cc+uu}$ eine vielwertige Funktion ist und um den Term 2π vermehrt werden kann, kann das Integral selbst um den Term $2\pi(cc+uu)$ vermehrt werden. Aber im Allgemeinen genügt auch die Differenz von zwei Integralen, also muss auch $y = 2\pi(cc+uu)$ Genüge leisten, und allgemein $y = \beta(cc+uu)$. Aus diesem Fall wird leichter erkannt, auf welche Weise der angenommene Wert der allgemeinen Gleichung Genüge leistet, abgleich er durch Integration nicht entwickelt werden kann. Es tritt aber klar zutage, dass $n+1$ eine positive Zahl kein muss, weil andernfalls die Integralbedingung, dass das Integral für $x=0$ verschwindet, nicht erfüllt werden kann.

Beispiel 2

§1032 Man nehme

$$V = x^{n-1}(uu+xx)^{\mu}(cc-xx)^{\nu}\text{, \textit{es wird gelten}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 2\mu u x^{n-1}(uu+xx)^{\mu-1}(cc+xx)^{\nu} \text{ \textit{und}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\partial V}{\partial u^2} &= 2\mu x^{n-1}(cc-xx)^{\nu}\left((uu+xx)^{\mu-1}+2(\mu-1)uu(uu+xx)^{\mu-2}\right) \\ \textit{oder} \qquad &= 2\mu x^{n-1}(cc-xx)^{\nu}(uu+xx)^{\mu-2}\left((2\mu-1)uu+xx\right) \end{aligned}$$

Also muss diese Formel uneingeschränkt integrierbar gemacht werden

$$\int x^{n-1}\partial x(cc-xx)^{\nu}(uu+xx)^{\mu-2}\begin{Bmatrix} 2\mu\left((2\mu-1)uu+xx\right)L \\ +2\mu u(uu+xx)M+(uu+xx)^2N \end{Bmatrix}$$

oder

$$\int x^{n-1}\partial x(cc-xx)^{\nu}(uu+xx)^{\mu-2}\begin{Bmatrix} 2\mu(2\mu-1)Luu+2\mu Lxx+Nx^4 \\ +2\mu Mu^3+2\mu Muxx \\ +Nu^4+2Nuuxx \end{Bmatrix}$$

Man setze also das Integral als $x^n(uu+xx)^{\mu-1}(cc-xx)^{\nu+1}$; weil dessen Differentail dieses ist

$$x^{n-1}\partial x(uu+xx)^{\mu-2}(cc-xx)^{\nu}(n(uu+xx)(cc-xx)+2(\mu-1)xx(cc-xx)-2(\nu+1)xx(uu+xx)),$$

wird gelten

$$2\mu(2\mu-1)Luu+2\mu Mu^3+Nu^4 = nccuu,$$

$$2\mu L+2\mu Mu+2Nuu = ncc-nuu+2(\mu-1)cc-2(\nu+1)uu,$$

$$N = -n-2(\mu-1)-2(\nu+1) = -n-2\mu-2\nu.$$

Aber die erste $2\mu(2\mu-1)L+2\mu Mu+Nuu = ncc$ gibt um die zweite vermindert

$$4\mu(\mu-1)L-Nuu = (n+2\nu+2)uu-2(\mu-1)cc \text{ \textit{oder}}$$

$$4\mu(\mu-1)L = -2(\mu-1)(uu+cc)\text{, \textit{daher}}$$

$$L = \frac{-cc - uu}{2\mu}$$

welcher Wert in der ersten eingesetzt gibt

$$-(2\mu - 1)(cc + uu) + 2\mu Mu - (n + 2\mu + 2\nu)uu = ncc,$$

oder

$$2\mu Mu = (n + 2\mu - 1)cc + (n + 4\mu + 2\nu - 1)uu.$$

Also

$$M = \frac{(n + 2\mu - 1)(cc + uu)}{2\mu u} + \frac{\mu + \nu}{\nu} u$$

Wenn $n > 0$ ist, verschwindet das obere Integral für $x = 0$; wenn wir also $x = a$ setzen, wird diese Gleichung entspringen

$$-\frac{(cc + uu)ddy}{2\mu \partial u^2} + \frac{(n + 2\mu - 1)(cc + uu)\partial y}{2\mu u \partial u} + \frac{(\mu + \nu)u\partial y}{\mu \partial u}$$

$$-(n + 2\mu + 2\nu)y = a^n (aa + uu)^{\mu - 1} (cc - aa)^{\nu + 1},$$

deren Integral diese ist

$$y = \int x^{n-1} \partial x (uu + xx)^\mu (cc - xx)^\nu$$

wenn das Integral so genommen worden ist, dass es für $x = 0$ verschwindet, danach aber $x = a$ gesetzt wird.

Korollar 1

§1033 Wenn $a = c$ genommen wird, dass der letzte Teil $= 0$ wird, wenn freilich der Exponent $\nu + 1$ größer als die Null ist, wird die Formel

$$y = \int x^{n-1} \partial x (uu + xx)^\mu (cc - xx)^\nu$$

für $x = c$ nach so ausgeführter Integration, dass im Fall $x = 0$ $y = 0$ wird, das Integral dieser Gleichung sein

$$u(cc + uu)\partial\partial y - (n + 2\mu - 1)(cc + uu)\partial u \partial y - 2(\mu + \nu)uu\partial u \partial y$$

$$+2\mu(n + 2\mu + 2\nu)uy du^2 = 0$$

Korollar 2

§1034 Es sei $n+2\mu-1=\alpha$, $n+4\mu+2\nu-1=\beta$; es wird $2\mu=\alpha+1-n$ und $2\nu=\beta+1-n-2\alpha-22n=\beta-1+n-2\alpha$ werden und das Integral der Gleichung

$$u(cc+uu)\partial\partial y-(\alpha cc+\beta uu)\partial u\partial y+(\alpha+1-n)(\beta-\alpha+n)uy\partial u^2=0$$

wird dieses sein

$$y=\int x^{n-1}\partial x(uu+xx)^{\frac{\alpha+1-n}{2}}(cc-xx)^{\frac{\beta-1+n-2\alpha}{2}}$$

wenn $x=c$ gesetzt wird und $n>0$ sowie $\beta+1+n>2\alpha$ ist.

Bemerkung

§1035 Diese Konstruktion erstreckt sich sehr weit bis hin zu dieser Gleichung

$$xx(a+bx^n)\partial\partial z+x(c+ex^n)\partial x\partial z+(f+gx^n)z\partial x^2=0\,.$$

Denn zuerst kann hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit $n=2$ genommen werden, indem $x^n=uu$ gesetzt wird. Dann geht aber, wie wir oben in §997 gesehen haben, die Gleichung durch Setzen von

$$z=x^{\frac{a-c}{a}+h}(a+bx^n)^{\frac{bc-ac}{nab}+1}y$$

in diese über

$$xx(a+bx^n)\partial\partial y+x(2a-c+2ah+(2b-e+2nb+2bh)x^n)\partial x\partial y$$

$$(f+ah-ch+ahh+(g+(b-e+nb++bh)(n+h))x^n)y)\partial x^2=0;$$

wenn dort h so angenommen wird, dass $ahh+(a-c)h+f=0$ wird, geht die eine Gleichung der Form hervor, deren Konstruktion wir in §1033 angegeben haben. In speziellen Fällen können aber Schwierigkeiten auftreten, zur Überkommung welcher die folgenden Beispiele dienen.

Beispiel 3

§1036 Es sei $V = e^{mus}x^{n+1}(c-x)^{\nu}$, *es wird gelten*

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right) = me^{mux}x^{n+1}(c-x)^{\nu} \textit{ und } \left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2}\right) = mme^{mux}x^{n+2}(c-x)^{\nu}$$

Also muss diese Formel integrierbar gemacht werden

$$e^{mux}x^n\partial x(c-x)^{\nu}(mmLxx + mMx + N),$$

deren Integral $= e^{mux}x^{n+1}(c-x)^{\nu+1}$ gesetzt werden, dessen Differential deshalb jener Formel gleich werden muss; weil das Differential dieses ist

$$e^{mux}x^n\partial x(c-x)^{\nu}(mux(c-x) + (n+1)(c-x) - (\nu+1)x), \textit{wird gelten}$$

$$N = (n+1)c\,,\; mM = mcu - (n+\nu+2)\,,\; mmL = -mu\,.$$

Man setze nun $x = a$ und die Formel

$$y = \int e^{mux}x^n\partial x(c-x)^{\nu}$$

wird das Integral dieser Gleichung sein

$$-\frac{u\partial\partial y}{m\partial u^2} + \frac{cu\partial y}{\partial u} - \frac{(n+\nu+2)\partial y}{m\partial u} + (n+1)cy = e^{mau}a^{n+1}(c-a)^{\nu+1}$$

Hier kann $m = 1$ gesetzt werden und für $c = 0$ genommen ist das Integral der Gleichung

$$u\partial\partial y - au\partial u\partial y + (n+\nu+2)\partial u\partial y - (n+1)ay\partial u^2 = 0$$

dieses

$$y = \int e^{ux}x^n\partial x(a-x)^{\nu}$$

wenn nach der Integration $x = a$ gesetzt wird, es sei nur $\nu + 1 > 0$ und $n + 1 > 0$, damit dass Integral für $x = 0$ verschwinden kann.

Korollar 1

§1037 Wenn hier $y = e^{\int z\partial u}$ gesetzt wird, wird gelten

$$u\partial z + uzz\partial u - auzdu + (n+\nu+2)z\partial u - (n+1)a\partial u = 0,$$

deren Integral dieses ist

$$z = \frac{\partial y}{y\partial u} = \frac{\int e^{ux}x^{n+1}\partial x(a-x)^{\nu}}{\int e^{ux}x^{n}\partial x(a-x)^{\nu}}$$

Jene Gleichung wird aber für $z = \frac{1}{2}a + v$ in diese verwandelt

$$u\partial v + uvv\partial u + (n+\nu+2)v\partial u - \frac{1}{4}aau\partial u - \frac{1}{2}(n-\nu)a\partial u = 0,$$

die durch Setzen von $v = u^{-n-\nu-2}s$ in diese übergeht

$$u^{-n-\nu-1}\partial s + u^{-(n-2\nu-3)}ss\partial u - \frac{1}{4}aau\partial u - \frac{1}{2}(n-\nu)a\partial u = 0$$

Korollar 2

§1038 Es sei weiter $u^{-n-\nu-2}\partial u = \partial t$ oder $u^{-n-\nu-1} = -(n+\nu+1)t$, dass wird

$$\partial s + ss\partial t - \frac{1}{4}aau^{2n+2\nu+4}\partial t - \frac{1}{2}(n-\nu)u^{2n+2\nu+5}\partial t = 0\,,$$

welche Gleichung alle auch konstruiert werden kann. Oder es sei $-(n+\nu+1)t = r$ es wird gelten

$$\partial s - \frac{ss\partial r}{n+\nu+1} + \frac{aar^{\frac{-2n-2\nu-4}{n+\nu+1}}\partial r}{4(n+\nu+1)} + \frac{(n-\nu)r^{\frac{-2n-2\nu-3}{n+\nu+1}}\partial r}{2(n+\nu+1)} = 0\,,$$

die für $s = -(n+\nu+1)q$ in diese übergeht

$$\partial q + qq\partial r - \frac{aar^{\frac{-2n-2\nu-4}{n+\nu+1}}\partial r - 2(n-\nu)r^{\frac{-2n-2\nu-3}{n+\nu+1}}\partial r}{4(n+\nu+1)^2} = 0$$

und hier ist

$$u = r^{\frac{-1}{n+\nu+1}}\; und\, z = \frac{1}{2}a - (n+\nu+1)r^{\frac{n+\nu+2}{n+\nu+1}}q$$

Bemerkung

§1039 Weil das Integral der Differenzen-Differentialgleichung [§1036]

$$\frac{\partial\partial y}{\partial u} - a\partial y + \frac{(n+\nu+2)}{u}\partial y - \frac{(n+1)ay\partial u}{u} = 0$$

$\int e^{ux} x^n \partial x (a-x)^\nu$ ist, wollen wir sehen, auf welche Weise diese Gleichung selbst in andere Formen überführt werden kann. Es sei zuerst $u = \alpha t^\lambda$ und daher $\partial u = \alpha\lambda t^{\lambda-1}\partial t$, daher wird

$$\frac{1}{\alpha\lambda}\partial\frac{\partial y}{t^{\lambda-1}\partial t} - a\partial y + \frac{(n+\nu+2)\partial y}{\alpha t^\lambda} - \frac{\lambda(n+1)ay\partial t}{t} = 0;$$

das Element dt werde nun konstant angenommen und es wird gelten

$$\frac{\partial\partial y}{\alpha\lambda t^{\lambda+1}\partial t} - \frac{(\lambda-1)\partial y}{\alpha\lambda t^\lambda} - a\partial y + \frac{(n+\nu+2]\partial y}{\alpha t^\lambda} - \frac{\lambda(n+1)ay\partial t}{t} = 0$$

oder

$$\partial\partial y - \alpha\lambda a t^{\lambda-1}\partial t\partial y + \frac{(\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1)\partial t\partial y}{t} - \alpha\lambda\lambda(n+1)at^{\lambda-2}y\partial t^2 = 0,$$

deren Integral dieses ist

$$y = \int e^{\alpha t^2 x} x^n \partial x (a-x)^\nu$$

Man setze weiter $\frac{\partial y}{y} = P\partial t + \frac{\partial z}{z}$, dass $z = e^{-\int P\partial t} y$ gilt; es wird [§993] gelten

$$\partial\partial z + 2P\partial t\partial z - \alpha\lambda a t^{\lambda-1}\partial t\partial z + (\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1)\frac{\partial t\partial z}{t} + z\partial t\partial P$$

$$+z\partial t^2\left[PP - \alpha\lambda a t^{\lambda-1}P + \frac{(\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1)P}{t} - \alpha\lambda\lambda(n+1)at^{\lambda-2} = 0\right]$$

Um die mit dem Element ∂z behafteten Terme zu beseitigen, setze man

$$P = \frac{1}{2}\alpha\lambda a t^{\lambda-1} - \frac{\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1}{2t}$$

und es wird $z = e^{-\frac{1}{2}\alpha a t^\lambda} t^{\frac{\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1}{2}} y$ und es wird diese Gleichung hervorgehen

$$\partial\partial z - z\partial t^2\left[\frac{(\lambda n+\lambda\nu+\lambda)^2-1}{4tt} + \frac{1}{2}\alpha\lambda\lambda(n-\nu)at^{\lambda-2} + \frac{1}{4}\alpha^2\lambda^2 a^{2\lambda-2}\right] = 0,$$

deren Integral deshalb dieses ist

$$z = e^{-\frac{1}{2}\alpha a t^{\lambda}} t^{\frac{\lambda n + \lambda \nu + \lambda + 1}{2}} \int e^{\alpha t^{\lambda} x} x^{n} \partial x (a-x)^{\nu}$$

Wenn daher also gilt $\nu = n, \lambda\lambda(2n+1)^2 - 1 = 0$ oder

$$\lambda = \frac{\pm 1}{2n+1}\, und\, \alpha = \pm\frac{2}{\lambda} = 2(2n+1),$$

wird man diese Gleichung haben

$$\partial\partial z - aazt^{\frac{\pm 2}{2n+1}-2}\partial t^2 = 0,$$

deren Integral dieses ist

$$z = e^{\pm(2n+1)at^{\pm 1}2n+1} t^{\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \int e^{\pm 2(2n+1)t^{\frac{\pm 1}{2n+1}} x} x^{n} dx (a-x)^{n}$$

oder das Integral diese Gleichung

$$\partial\partial z - aat^{2\lambda-2} z \partial t^2 = 0$$

ist dieses

$$z = e^{-\frac{a}{\lambda}t^{\lambda}} t \int e^{\pm 2(2n+1)t^{\frac{\pm}{2n+1}} x} x^{n} \partial x (a-x)^{n}.$$

oder das Integral dieser Gleichung

$$\partial\partial z - aat^{2\lambda-2} z \partial t^2 = 0$$

ist dieses

$$z = e^{\frac{a}{\lambda}t^{\lambda}} t \int e^{\frac{2x}{\lambda}t^{\lambda}} x^{\pm\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\pm\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}},$$

welcher wir die Gelegenheit ergreifen wollen, Integrationen von dieser Art allgemeiner zu untersuchen.

Beispiel 4

§1040 Wenn P und Q irgendwelche Funktionen von u sind und man

$$y = P\int e^{Qx}x^{n-1}dx(a-x)^{\nu-1}$$

genommen wird, wenn natürlich nach der Integration $x = a$ gesetzt wird, wird diese Wert von y das Intetral einer gewissen Differenzen-Differentialgleichung

$$\frac{L\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny = 0$$

sein, welche gesucht wird. Um die Rechnung kürzer zu fassen, wollen wir $\partial P = P'\partial u$ und $\partial P' = P''\partial u$ setzen, ebenso $\partial Q = Q'\partial u$ und $\partial Q' = Q''\partial u$. Daher wird gelten

$$\frac{\partial y}{\partial u} = P'\int e^{Qx}x^{n-1}\partial x(a-x)^{\nu-1} + PQ'\int e^{Qx}x^{n}\partial x(a-x)^{\nu-1}\, und$$

$$\frac{\partial\partial y}{\partial u^2} = P''\int e^{Qx}x^{n-1}\partial x(a-x)^{\nu-1} + 2P'Q'\int e^{Qx}x^{n}\partial x(a-x)^{\nu-1}$$
$$+PQ''\int e^{Qx}x^{n}\partial x(a-x)^{\nu-1} + PQ'Q'\int e^{Qx}x^{n+1}\partial x(a-x)^{\nu-1},$$

woher man erschließt

$$\frac{L\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny =$$

$$\int e^{Qx}x^{n-1}\partial x(a-x)^{\nu-1}\begin{Bmatrix} LP'' + 2LP'Q'x + LPQ''x + LPQ'Q'xx \\ +MP' + MPQ'x + NP \end{Bmatrix}$$

welches Integral $= e^{Qx}x^n(a-x)^\nu$ gesetzt werde, so dass es für $x = a$ verschwindet, solange $\nu > 0$ ist, wie es auch im Fall $x = 0$ verschwindet, wenn nur $n > 0$ ist. Weil also das Differential dieser Formel dieses ist

$$e^{Qx}x^{n-1}\partial x(a-x)^{\nu-1}(Qx(a-x) + na - (n+\nu)x),$$

dessen Vergleich mit der gefundenen Form liefert

$$LP'' + MP' + NP = na,$$

$$2LP'Q' + LPQ'' + MPQ' = aQ - (n+\nu)\, und$$

$$LPQ'Q' = -Q, \textit{ also } L = \frac{-Q}{PQ'Q'}, \textit{ daher}$$

$$M = \frac{aQ}{pQ'} - \frac{n+\nu}{PQ'} - \frac{2P'Q}{PPQ'Q'} + \frac{QQ''}{PQ'Q'Q'} \textit{ und}$$

$$N = \frac{na}{P} + \frac{P''Q}{PPQ'Q'} - \frac{MP'}{P} :$$

und so wird die Differenzen-Differentialgleichung bekannt sein.

Korollar 1

§1041 Wenn wir fordern, dass $M = 0$ ist, wird gelten

$$aQ - (n+\nu) + \frac{2P'Q}{PQ'} + \frac{QQ''}{Q'Q'} = 0,$$

welche mit $\frac{Q'du}{Q}$ multipliziert in diese übergeht

$$\frac{2\partial P}{P} + a\partial Q - \frac{(n+\nu)\partial Q}{Q} + \frac{\partial Q'}{Q'} = 0,$$

deren Integral dieses ist

$$\frac{e^{aQ}P^2Q'}{Q^{n+\nu}} = const. \, oder$$

$$P = Ce^{-\frac{1}{2}aQ}Q^{\frac{n+\nu}{2}}\sqrt{\frac{du}{dQ}}$$

Korollar 2

§1042 Es sei $Q = 2\alpha u^{\lambda}$, es wird $Q' = 2\alpha\lambda u^{\lambda-1}$ und

$$P = Ce{-}\alpha au\lambda u^{\frac{-\lambda(n+\nu+1)+3}{2}} \textit{ daher}$$

$$L = -\frac{1}{2\alpha\lambda\lambda}e^{\alpha au^2}u^{\frac{-\lambda(n+\nu+1)+3}{2}} \textit{ und}$$

$$N = \frac{na}{P} + \frac{Q\partial\partial P}{PP\partial Q^2}, \textit{ aberesist}$$

$$\frac{Q}{\partial Q^2} = \frac{u^{-\lambda+2}}{2\alpha\lambda\lambda\partial u^2} \mathit{und\ wegen}$$

$$\frac{\partial P}{P} = -\alpha\lambda a u^{\lambda-1}\partial u + \frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}\cdot\frac{\partial u}{u} \mathit{\ wird\ gelten}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial\partial P}{P} = \quad & -\alpha\lambda(\lambda-1)au^{\lambda-2}\partial u^2 - \tfrac{\lambda(n+\nu-1)-1}{2}\cdot\tfrac{\partial u^2}{uu} + \alpha\alpha\lambda\lambda aau^{2\lambda-2}\partial u^2 \\ & -\alpha\lambda a[\lambda(n+\nu-1)+1] + \tfrac{(\lambda(n+\nu-1)+1)^2}{4}\end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial\partial P}{P} = \alpha\alpha\lambda\lambda aau^{2\lambda-2}\partial u^2 - \alpha\lambda\lambda(n+\nu)au^{\nu-2}\partial u^2 + \frac{\lambda\lambda(n+\nu-1)^2-1}{4}\cdot\frac{\partial u^2}{uu},$$

daher

$$na + \frac{Q}{\partial Q^2}\cdot\frac{\partial\partial P}{P} = \frac{1}{2}\alpha aau^{\lambda} + \frac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda\lambda(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda\lambda}u^{-\lambda} \mathit{\ und}$$

$$N = e^{\alpha a u^{\lambda}} u^{\frac{-\lambda(n+\nu-1}{2}} \left[\frac{1}{2}\alpha aau^{\lambda} - \frac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda\lambda(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda\lambda}u^{-\lambda}\right]$$

Korollar 3

§1043 Daher wird gelten

$$\frac{N}{L} = -2\alpha\lambda\lambda u^{\lambda-2}\left[\frac{1}{2}\alpha aau^{\lambda} + \frac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda\lambda(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda\lambda}u^{-\lambda}\right]$$

und das Integral dieser Gleichung

$$\frac{\partial\partial y}{\partial u^2} = y\left[\alpha\alpha\lambda\lambda aau^{2\lambda-2} + \alpha\lambda\lambda(n-\nu)au^{\lambda-2} + \frac{\lambda\lambda(n+\nu-1)^2-1}{4uu}\right]$$

ist

$$y = e^{-\alpha a u^{\lambda}} u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}} \int e^{2\alpha u^{\lambda}x} x^{n-1}\partial x (a-x)^{\nu-1}$$

Wir wollen festlegen $\alpha = \frac{1}{\lambda}$,

$$\lambda(n-\nu) = f, \mathit{\ oder\ } \nu = n - \frac{f}{\lambda} \mathit{\ und\ } \frac{\lambda\lambda(n+\nu-1)^2-1}{4} = g,$$

welcher wird

$$n = \frac{f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda} \mathit{\ und\ } \nu = \frac{-f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda},$$

und das Integral dieser Gleichung

$$\partial\partial y = y\partial u^2 \left(aau^{2\lambda-2} + afu^{\lambda-2} + gu^{-2}\right)$$

ist

$$y = e^{\frac{a}{\lambda}u^\lambda} u^{\frac{\lambda(n+\nu 1)+1}{2}} \int e^{\frac{2x}{\lambda}u^\lambda} x^{n-1}\partial x(a-x)^{\nu-1}$$

oder

$$y = e^{-\frac{a}{\lambda}u^\lambda} u^{\frac{1+\sqrt{1+4g}}{2}} \int e^{\frac{2x}{\lambda}u^\lambda} x^{\frac{f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}} \partial dx(a-x)^{\frac{-f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}$$

Korollar 4

§1044 Wenn wir festlegen$\alpha = \frac{-1}{\lambda}$

$$\lambda(n-\nu) = -f\, und\, \frac{\lambda\lambda(n+\nu-1)^2-1}{4} = g$$

wird gelten

$$n = \frac{-f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2lambda}\, und\, \nu = \frac{f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda},$$

woher das Integral dieser Gleichung, die mit der vorhergehenden übereinstimmt,

$$\partial\partial y = y\partial u^2(aau^{2\lambda-2} + afu^{\lambda-2}gu^{-2})$$

sein wird

$$y = e^{\frac{a}{\lambda}u^\lambda} u^{\frac{1+\sqrt{1+4g}}{2}} \int e^{-\frac{2x}{\lambda}u^\lambda} x^{\frac{-f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}} \partial x(a-x)^{\frac{+f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}$$

wo notwendigerweise $n > 0$ und $\nu > 0$ ist.

Beispiel 5

§1045 Wenn wir festlegen $y = \int \partial x(aa-xx)^{\nu-1} cos\alpha u^{\lambda-1}x$, und nach der Integration $x = a$ gesetzt wird, dass y einer gewissen Funktion von u gleich wird, die Differenzen-Differentialgleichung zu finden, welcher sie genügt. Weil gilt

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\alpha\lambda u^{\lambda-1} \int x\partial x(aa-xx)^{\nu-1} sin\alpha u^\lambda x\, und$$

$$\frac{\partial\partial y}{\partial u^2} = \int x\partial x(aa-xx)^{\nu-1}[-\alpha\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}sin\alpha u^\lambda x - \alpha\alpha\lambda\lambda u^{2\lambda-2}xcos\alpha u^\lambda x]$$

daher wird gelten

$$\frac{L\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny =$$

$$\int \partial x(aa-xx)^{\nu-1}\left\{\begin{matrix} Ncod\alpha u^\lambda x - \alpha\lambda Mu^{\lambda-1}xsin\alpha u^\lambda x \\ -\alpha\lambda(\lambda-1)Lu^{\lambda-2}xsin\alpha u^\lambda x \\ -\alpha\alpha\lambda\lambda Lu^{2\lambda-2}xxcos\alpha u^\lambda x \end{matrix}\right\}$$

Man setze also das Integral $= (aa-xx)^\nu sin\alpha u^\lambda x$ an, was so für $x=0$ wie für $x=a$ verschwindet, und man wird nach Anstellen eines Vergleichs auffinden

$$L = \frac{u^{-\lambda+2}}{\alpha\lambda\lambda},\ M = \frac{2\lambda\nu-\lambda+1}{\alpha\lambda\lambda}u^{-\lambda+1},\ N = \alpha aau^\lambda.$$

Daher ist das Integral dieser Gleichung

$$\frac{\partial\partial y}{\partial u^2} + (2\lambda\nu-\lambda+1)\frac{\partial y}{u\partial u} + \alpha\alpha\lambda\lambda aau^{2\lambda-1}y = 0$$

dieser

$$y = \int \partial x(aa-xx)^{\nu-1}cod\alpha u^\lambda x.$$

Korollar 1

§1046 Wenn also $\nu = \frac{\lambda-1}{2\lambda}$ und $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ ist, ist das Integral dieser Gleichung

$$\frac{\partial\partial y}{\partial u^2} + aau^{2\lambda-2}y = 0$$

dieses

$$y = \int \partial x(aa-xx)^{\frac{-\lambda-1}{2\lambda}}cos\frac{1}{\lambda}u^\lambda x$$

wenn freilich nach der Integration $x=a$ gesetzt wird, das Integral so genommen, dass es für $x=0$ verschwindet.

Korollar 2

§1047 Wenn also $frac{-}\lambda - 12\lambda = i$, eine ganze Zahl, oder $\lambda = -\frac{1}{2i+1}$ ist, ist das Integral dieser Gleichung

$$\partial\partial y + aau^{\frac{-4i-4}{2i+1}} ydu^2 = 0$$

dieses

$$y = \int \partial x (aa - xx)^i cos \frac{1}{\lambda} u^\lambda x,$$

was in der Tat dargeboten werden kann. Es gehen natürlich die oben angegebenen integrierbaren Fälle hervor. [§951]

Bemerkung

§1048 Weil wir $y = \int V\partial x$ gesetzt haben, während V irgendeine Funktion von u und x ist, von denen aber in der Integration allein x variabel behandelt wird, ist es nicht zwingend von Nöten, das Integral so zu bestimmen, dass es für $x = 0$ verschwindet, sondern es genügt, dass es in einem bestimmten Fall $x = b$ verschwindet; wenn danach weiter $x = a$ gesetzt wird, dass y eine gewisse Funktion von u gleich wird, lässt sich diese durch Quadraturen angeben, weil wir ja hier die Integration von einfachen Formeln berechtigt als bereits erledigt einfordern. Und dieser Wert von y, durch u ausgedrückt, wird das Integral einer gewissen Differenzen-Differentialgleichung

$$L\partial\partial y + M\partial u\partial y + Ny\partial u^2 = U\partial u^2$$

darbieten, wo aber notwendig ist, dass diese Formel

$$\int \partial x \left(L \left(\frac{\partial\partial V}{\partial u^2} \right) + M \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right) + NV \right)$$

tatsächlich integriert werden kann, welches Integral freilich so zu nehmen ist, dass es für $x = b$ gesetzt verschwindet, dann aber werde es für $x = a$ zu U.

Problem 131

§1049 Wenn P und Q Funktionen von x waren, aber K eine Funktion von u und festgelegt wird

$$y = \int P\partial x(K+Q)^n,$$

mit so genommenen Integral, dass es im Fall $x = b$ verschwindet, dann aber $x = a$ gesetzt wird, dass für y eine Funktion von u hervorgeht, die Differenzen-Differentialgleichung zwischen y und u zu finden, welcher jener Wert von y Genüge leistet.

Lösung

Es sei $\partial K = K'\partial u$ und $\partial K' = K''\partial u$ und wegen

$$y = \int (K+Q)^n P\partial x\,, wird\, gelten\, \frac{\partial y}{\partial u} = \int nK'(K+Q)^{n+1} P\partial x$$

und durch erneutes Differenzieren

$$\frac{\partial\partial y}{\partial u^2} = \int \left[nK''(K+Q)^{n-1} + n(n+1)K'K'(K+Q)^{n-2}\right] P\partial x$$

welcher, wenn L, M, N Funktionen von u bezeichnen, der allgemeine Ausdruck dieser sein wird

$$\frac{L\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny$$

$$= \int P\partial x(K+Q)^{n-2} \begin{Bmatrix} N(K+Q)^2 + nMK'(K+Q) \\ +nLK''(K+Q) + n(n-1)LK'K' \end{Bmatrix}$$

$$= \int P\partial x(K+Q)^{n-2} \begin{Bmatrix} NKK + nKK' + nKK'' + n(n-1)LK'K' \\ +2NKQ + nMK'Q + nLK''Q + NQQ \end{Bmatrix}$$

weil diese integrierbar sein muss, setze man das Integral $= R(K+Q)^{n-1} + const.$, so dass es wie zuvor für $x = b$ verschwindet wo R eine Funktion nur von x sei. Weil das Differential diese Form selbst dieses ist

$$(K+Q)^{n-2}\left[K\partial R + Q\partial R + (n-1)R\partial Q\right]$$

muss gelten

$$\left[NKK + nMKK' + nLK'' + n(n-1)LK'K'\right] P\partial x + (2NK + nMK' + nLK'')PQ\partial x + NPQQ\partial x$$

$$= K\partial R + Q\partial R + (n-1)R\partial Q.$$

Hier müssen also Terme von zwei Arten vorhanden sein, die einen völlig frei von u, die anderen hingegen mit der Funktion Kbehaftet, welche jeweils getrennt voneinander gleich sein müssen.
Für dieses Ziel wollen wir festlegen

$$NKK + nMKK' + nLKK'' + n(n-1)LK'K' = A + \alpha K,$$

$$2NK + nMK' + nLK'' = B + \beta K\, und$$

$$N = C + \gamma K$$

Aus den zwei ersten folgert man durch Eliminieren von M

$$-NKK + n(n-1)LK'K' = A + \alpha K - BK - \beta KK\,,$$

welcher wegen $N = C + \gamma K$ gefolgert wird

$$L = \frac{A + (\alpha - B)K - (\beta - C)KK + \gamma K^3}{n(n-1)K'K'}$$

und daher

$$M = \frac{B + \beta K - 2NK - nLK''}{nK'}$$

so dass aus der Funktion K die Buchstaben L, M und N bestimmt werden, während A, α, B, β, C, γ irgendwelche Konstanten bezeichnen.
Nun ist es aber übrig, dass man folgende Gleichheit erwirkt

$$(A + \alpha K)P\partial x + (B + \beta K)PQ\partial x + (C + \gamma K)PQQ\partial x$$

$$K\partial R + Q\partial R + (n-1)R\partial Q,$$

woher durch Gleichsetzen der jeweiligen Terme wird

$$P\partial x(A + BQ + CQQ) = Q\partial R + (n-1)R\partial Q$$

$$p\partial x(\alpha + \beta Q + \gamma QQ) = \partial R$$

und daher

$$\frac{A+BQ+CQQ}{\alpha+\beta Q+\gamma QQ}=Q+\frac{(n-1)R\partial Q}{\partial R}\,oder$$

$$\frac{(n-1)R\partial Q}{\partial R}=\frac{A+(B-\alpha)Q+C(c-\beta)QQ-\gamma Q^3}{\alpha+\beta Q+\gamma Q}\,also$$

$$\frac{\partial R}{R}=\frac{(n-1)\partial Q(\alpha+\beta Q+\gamma Q}{A+(B-\alpha)Q+(c-\beta)QQ-\gamma Q^3}$$

Nun gehe jenes Integral $R(K+Q)^{n-1}+const.$ für $x=a$ in die Funktion U über und der eingangs angenommene Wert

$$y=\int\frac{(n-1)R\partial Q(K+Q)^n}{A+(b-\alpha)Q+(c-\beta)QQ-\gamma Q^3}$$

wird das Integral dieser Differenzen-Differentialgleichung sein

$$L\partial\partial y+M\partial u\partial y+Ny\partial u^2=U\partial u^2$$

Korollar 1

§1050 Weil für Q irgendeine Funktion von x angenommen werden kann, hindert nicht daran, dass wir $Q=x$ nehmen. Dann muss also R aus dieser Gleichung gesucht werden

$$\frac{\partial R}{R}=\frac{(n-1)\partial x(\alpha+\beta x+\gamma xx)}{A+(B-\alpha)x+(C-\beta)xx-\gamma x^3}$$

und es wird nach Annahme irgendeiner Funktion von u für K gelten

$$y=(n-1)\int\frac{R\partial x(K+x)^n}{A+(B-\alpha)x+(C-\beta)xx-\gamma x^3},$$

in welcher für so genommenes Integral, dass es für $x=b$ verschwindet, darauf $x=a$ gesetzt werden muss.

Korollar 2

§1051 Aber aus der Funktion K wird die Differenzen-Differentialgleichung gebildet, so ist

$$L = \frac{A - (B-\alpha)K + (C-\beta)KK + \gamma K^3}{n(n-1)\partial K^2}\partial u^2\,,$$

$$M = \frac{B - (2C-\beta)K - 2\gamma KK}{n\partial K}\partial u - \frac{L\partial\partial K}{\partial u\partial K},\ und\ N = C + \gamma K.$$

Darauf setze man im so festgelegten Ausdruck $R(K+x)^{n-1} + const.$, dass er für $x = b$ verschwindet, $x = a$ und die daraus resultierende Funktion von U nenne man U und die Differenzen-Differentialgleichung wird diese sein

$$L\partial\partial y + M\partial u\partial y + Ny\partial u^2 = U\partial u^2$$

Korollar 3

§1052 Wenn der Ausdruck $R(K+x)^{n-1} + const.$ so beschaffen ist, dass er in jedem der beiden Fälle $x = b$ und $x = a$ verschwindet, oder besser die Integrationsgrenzen so gewählt werden, dass dies geschieht, wird die für y angenommene Formel dieser Gleichung genügen

$$L\partial\partial y + M\partial u\partial y + Ny\partial u^2 = 0\,,$$

wenn sie darauf in andere Formen überführt wird, werden auch deren Integral angegeben werden können

Problem132

§1053 Wenn P, Q Funktionen von x waren, aber K eine Funktion von u und festgelegt wird

$$y = \int e^{KQ}P\partial x$$

für so genommenes Integral, dass es im Fall $x = b$ verschwindet, dann aber $x = a$ gesetzt wird, so wird auch y einer Funktion von u gleich wird auch y einer Funktion von u gleich werden, die einer gewissen Differenzen-Differentialgleichung genügen muss, welche gefunden werden muss.

Lösung

Weil nun $y = \int e^{KQ} P\partial x$ ist, wird gelten

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \int e^{KQ} K' PQ\partial x \, und \, \frac{\partial\partial y}{\partial u^2} = \int e^{KQ} P\partial x (K''Q + K'K'Q'Q)$$

welcher wird

$$\frac{L\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny = \int e^{KQ} P\partial x (N + MK'Q + LK''Q + LK'K'QQ)$$

deren Integral $e^{KQ}R + const.$ gesetzt werde, welcher Ausdruck für $x = b$ gesetzt verschwinde und es muss werden

$$\partial R + KR\partial Q = P\partial x \left[N + (MK' + LK'')Q + LK'K'QQ\right]$$

und wegen der zuvor [§1049] angeführten Gründe wollen wir festlegen

$$LK'K' = A + \alpha K \, , \, MK' + LK'' = B + \beta K \, , \, N = C + \gamma K$$

und es wird gelten

$$L = \frac{A + \alpha K}{K'K'} \, und \, M = \frac{B + \beta K}{K'} - \frac{LK''}{K'} \, ,$$

und wir werden diese Gleichungen erhalten

$$\partial R = P\partial x (C + BQ + AQQ), \, R\partial Q = P\partial x (\gamma + \beta Q + \alpha QQ),$$

woher man schließt

$$\frac{\partial R}{R} = \frac{\partial Q (C + BQ + AQQ)}{\gamma + \beta Q + \alpha QQ} \, ,$$

so dass gilt

$$y = \int eKQ \frac{RdQ}{\gamma + \beta Q + \alpha QQ}.$$

Wenn nun der Audruck $e^{KQ}R + const.$ für $x = a$ in die Funktion U übergeht, wird die Differenzen-Differentialgleichung, welcher dieses Integral zukommt, diese sein

$$L\partial\partial y + M\partial u\partial y + Ny\partial u^2 = U\partial u^2$$

Korollar 1

§1054 Hier lässt sich für Q wie zuvor x schreiben, woher wird

$$\frac{\partial R}{R} = \frac{\partial x(C + Bx + Axx)}{\gamma + \beta x + \alpha xx}\, und\, y = \int e^{Kx} \frac{R\partial x}{\gamma + \beta x + \alpha xx}\,,$$

und U entspringt aus der Form $e^{Kx}R + const.$ für $x = a$. Aber der Wert von R kann je nach Verhältnis der Koeffizienten α, β, γ verschiedene Formen annehmen.

Korollar 2

§1055 Für K kann aber irgendeine Funktion von u angenommen werden, von deren Beschaffenheit die Differenzen-Differentailgleichung abhängt. Es wird aber gelten

$$L = \frac{A + \alpha K}{\partial K^2}\partial u^2\,,$$

$$M = \frac{B + \beta K}{\partial K}\partial u - \frac{(A + \alpha K)\partial u \partial\partial K}{\partial K^3}\, und\, N = C + \gamma K\,,$$

welche die Differenzen-Differentialgleichung ist

$$\frac{(A + \alpha K)\partial\partial y}{\partial K^2} + \frac{(B + \beta K)\partial y}{\partial K} - \frac{(A + \alpha K)\partial\partial K \partial y}{\partial K^3} + (C + \gamma K)y = U\,,$$

Korollar 3

§1056 Weil hier auch u aus der Rechnung herausgeht, ist es nebensächlich, einer Funktion von welcher Art derselben für K angenommenen wird; ja es kann sogar ohne Einschränkung $K = u$ gesetzt werden, solange nur dem Element, welches konstant angenommen wird, Rechnung getragen wird.

Bemerkung 1

§1057 Wenn also $K = u$ angenommen wird und das Element ∂u konstant angesehen wird, dass $\partial\partial K = 0$ wird, kann daraus diese Gleichung konstruiert werden

$$\frac{(A+\alpha u)\partial\partial y}{\partial u^2} + \frac{(B+\beta u)\partial y}{\partial u} + (C+\gamma u)y = U\,,$$

während U eine Funktion solcher Art von u ist, wie wir sie beschrieben haben. Auf gleiche Weise aber kann aus dem vorhergehenden Problem [§1051] diese Gleichung konstruiert werden

$$\left[A-(B-\alpha)u+(C-\beta)uu+\gamma u^3\right]\frac{\partial\partial y}{\partial u^2} + (n-1)\left[B-(2C-\beta)u-2\gamma uu\right]\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$n(n-1)(C+\gamma u)y = U$$

welche zu verstehen ist, sich genauso weit zu erstrecken, wie wenn wir irgendeine Funktion von t geschrieben und ∂t konstant angenommen wird, alle jene Formen abgeleitet werden. Daher erstreckt sich diese Gleichung um vieles weiter als jene, die wir oben [§967, 992] im Allgemeinen mit unendlichen Reihen aufgelöst haben. Meist sind diese Gleichungen so beschaffen, dass deren Integration mit anderen Methoden nicht ausgeführt werden kann, weshalb diese Methode ganz und gar dessen würdig erscheint, dass die Geometertheorie alle ihre Kräfte darauf verwenden, sie weiter auszubauen.

Bemerkung 2

§1058 Ich habe mich mit der Untersuchung von Konstruktion dieser Art auf diese Weise angegangen, dass ich zuerst quasi mit einer Vermutung eine gewissen Integralformel $\int V\partial x = y$, in welcher eine gewisse Funktion von u und x war, wo aber u wie eine Konstante behandelt wurde, angenommen habe und von da aus, nachdem x ein gegebener Wert zugeteilt wurde, bin ich dann zu einer Differenzen-Differentialgleichung zwischen u und y gelangt, welcher die angenommene Form Genüge leistete. Hier ist aber zu bemerken, dass jene Integralformel nicht völlig von unserem Belieben abhängt, sondern eine gewisse Gestalt besitzen muss, damit nach der Entwicklung alles auf eine Differentialgleichung zweiten Grades geführt wird. Solange wir diese Auswahl aber allein nach einer Vermutung treffen, so kommen einem sehr wenige Formeln in den Sinn, die zum vorgelegten Ziel führen, und um vieles weniger lässt sich hoffen, dass wir auf diese Weise jemals zu einer vorgegebenen Differenzen-Differentialgleichung gelangen, und die hier angegebenen Konstruktionen scheien hauptsächlich auf Zufall zu bassieren. Weil wir also noch sehr weit von der allgemeinen Lösung des Problems entfernt sind, in welchem nach Vorlage einer Differenzen-Differentialgleichung jene ihre Integration an die Hand gebende Formel gesucht wird, scheint es sogar ungewiss, ob dieses Problem, jemals gelöst werden wird; und umso mehr Mühe ist darauf zu verwenden, dass wir zumindest für spezielle Fälle die Integralformel allein aus der Beschaffenheit der vorgelegten Gleichung abzuleiten versuchen und so auf gewisse Weise den Weg zu einer direkten Lösung bereiten. Dafür können aber oft unendliche Reihen, mit welchen wir aber Gleichungen von dieser Art aufzulösen gelehrt haben, mit Nutzen verwendet werden; daher werde ich im folgenden Kapitel die Methode darstellen, aus einer die Lösung einer gewissen Differenzen-Differentialgleichung enthaltenden Reihe jene Integralformel ausfindig zu machen.